

管线钢环境断裂裂尖过程区应力应变场分析

董绍华 彭东华 邸鑫 张河苇

(中国石油大学(北京) 昌平区府学路 18 号 102200 shdong@cup.edu.cn)

摘要:

以氢致开裂(HIC)为代表的环境断裂(EAC)问题是影响管道长期安全运行的关键问题,而裂纹尖端微观区域的力学状态是影响环境致裂裂纹扩展速率的重要因素之一,大量的试验表明,环境断裂裂尖过程区的应力应变场可以表征裂纹的稳定状态。本文考虑管线钢材料的硬化系数、硬化指数,基于小变形 J 积分奇异性的假设,采用数值解析法对断裂过程区力学特性进行研究,建立了裂尖应力应变位移场的三项渐进多项式分布模型,并对 HRR 方法进行了合理的修正,得出了较为精确的理论解,为管线钢服役状态的完整性评价提供理论基础。

1 概述

过程区是距裂尖最近的区域,过程区的概念在断裂力学中广泛使用,其形变特征是决定裂纹扩展的关键因素,而裂尖的形变特征主要是由过程区附近的弹塑性应力场和位移场决定的,Hutchinson、Rice 和 Rosengren^[1](简称 HRR)进行了基于 J 积分的单参数断裂应力场和位移场的分析,Shin 和 German^[2]对 J-主导的能量损失和所引起的偏差进行了分析,并得出了较好的结论,但其分析方法上采用省略二阶以上项的做法,具有一定的局限性。非线性效应对裂纹顶端应力应变场的影响,Zhelthov 和 Khristianovich^[3]首次提出了过程区的概念,随后 Barenblatt^[4]指出过程区存在于裂尖前方一小的区域内,内聚应力与外载荷引起的应力方向相反,作用于裂纹表面,并通过消除裂尖奇异性,利用式(1)推出了过程区内聚应力的模型。

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} K_{coh} = K_{IC} \quad (1)$$

其中: r_p 为过程区的长度, $f(x)$ 为内聚应力的分布函数, K_{coh} 为内聚区临界应力强度因子,它与外载荷作用下的断裂韧性 K_{IC} (I型裂纹)的关系如下:

$$K_{coh} = \int_0^{r_p} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx \quad (2)$$

为了建立氢致裂纹扩展的多参数断裂判据,真实的描述应力作用下氢致开裂的物理特征,重新对断裂过程区应力、应变场进行分析,为材料断裂失效行为的研究提供重要的理论基础,这对于管线钢氢致开裂失效行为的研究具有重要意义。

本文考虑了管线用中低碳钢 16Mn 和 20 号钢的韧性硬化现象,研究了管线钢弹塑性裂尖应力、位移场的三项渐进多项式分布情况,对应力场、位移场角函数进行了计算,考虑了硬化系数、硬化指数和小变形 J 积分的假设,得出了较为精确的理论解,对 HRR 方法进行了合理的修正,提出了裂尖应力应变场的分布规律。

2 三项渐进多项式弹塑性裂尖应力场和位移场

2.1 应力场和位移场的控制方程

考虑二维平面应变弹塑性体 I 型裂纹，裂尖坐标系如图 1 所示，极坐标系 r, θ 表示应力 σ_r, σ_θ 和 $\sigma_{r\theta}$ ，位移 u_r, u_θ ，问题的定义由平衡方程、本构方程、应变-位移方程所定义。

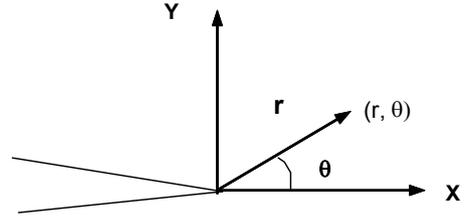


图 1 平面 I 型裂纹坐标系

在极坐标下平衡方程有下列形式：

$$\begin{aligned}\sigma_{r,r} + \frac{1}{r}\sigma_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) &= 0 \\ \sigma_{r\theta,r} + \frac{1}{r}\sigma_{\theta,\theta} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} &= 0\end{aligned}\quad (3)$$

其中下标 (,) 代表相对于 (,) 后下脚标的偏微分。

采用 Ramberg-Osgood 单轴向应力应变曲线，描述弹塑性应变硬化材料变形行为的本构关系为：

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (4)$$

其中 σ_0 为屈服应力； α 为硬化系数； n 为硬化指数 ($n > 1$)； $\varepsilon_0 = \sigma_0 / E$ ； E 为弹性模量，对于三向应力状态，本构关系为：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} s_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \alpha \sigma_0 \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\sigma_0} \quad (5)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (6)$$

$$\sigma_e = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2} \quad (7)$$

其中 s_{ij} 是应力偏张量， σ_e 为 Mises 等效应力。

应变和位移的关系为：

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= u_{r,r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r} u_{\theta,\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} u_{r,\theta} + u_{\theta,r} - \frac{1}{r} u_\theta \right)\end{aligned}\quad (8)$$

问题由方程式 (3) (5) (8) 定义，其边界条件为：

$$u_\theta(0) = 0 \quad \sigma_{r\theta}(0) = 0$$

$$\sigma_\theta(\pi) = 0 \quad \sigma_{r\theta}(\pi) = 0 \quad (9)$$

2.2 应力、位移场的三项渐进多项式

以往计算弹塑性裂尖应力场、位移场时，仅采用了近似计算方法，方程的表达式只包含一项，实际在过程区裂尖区域内，如果不考虑材料硬化等机械性能的影响，应力场可表示为三项渐进多项式形式^[5]：

$$\sigma_{ij}(r, \theta) / \sigma_0 = \bar{r}^s \sigma_{ij}^{(0)}(\theta) + \bar{r}^t \sigma_{ij}^{(1)}(\theta) + \bar{r}^u \sigma_{ij}^{(2)}(\theta) \quad (10)$$

其中， $s < t < u$ ， \bar{r} 为无量纲距离和 $\sigma_{ij}^{(0)}, \sigma_{ij}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(2)}$ 为无量纲应力， θ 为与水平坐标轴正向逆时针夹角（如图 1 所示），其中右上标（0）（1）（2）分别代表无量纲三项应力项。下面计算特征值 s, t, u 。

假设弹性应变足够小，在三项渐进多项式方程中可忽略，方程（5）可简化为：

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{\alpha \sigma_0} = \frac{3}{2} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\sigma_0} \quad (11)$$

利用式（7）、式（6）和式（10），项 $\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1}$ 能被写成下列形式：

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} = & (r^{2S} (\sigma_e^{(0)})^2 (1 + 2r^{t-S} \sigma_e^{(01)} + 2r^{u-S} \sigma_e^{(02)} + 2r^{(t+u-2S)} \sigma_e^{(12)} + \\ & r^{2t-2S} \sigma_e^{(11)} + r^{2u-2S} \sigma_r^{(22)}))^{n-1/2} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\sigma_e^{(0)} = \left(\frac{3}{2} s_{ij}^{(0)} s_{ij}^{(0)} \right)^{1/2} \quad (13)$$

$$\sigma_e^{(kl)} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^{(0)} s_{ij}^{(kl)}}{(\sigma_e^{(0)})^2} \quad (14)$$

对方程（12）应用二项式定理，并将方程（12）代入（11）中，进行矢量相乘，保留指数项到 $s(n-2) + 2t$ ，得到下面应变多项式：

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{\alpha \sigma_0} = r^{sn} \varepsilon_{ij}^{(0)} + r^{s(n-1)+t} \varepsilon_{ij}^{(1)} + r^{s(n-1)+u} \varepsilon_{ij}^{(2)} + r^{s(n-2)+2t} \xi_{ij}^{(1)} \quad (15)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(0)} = \frac{3}{2} \sigma_e^{(0)n-1} s_{ij}^{(0)} \quad (16)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{3}{2} \sigma_e^{(0)n-1} (s_{ij}^{(1)} + (n-1) \sigma_e^{(01)} s_{ij}^{(0)}) \quad (17)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} = \frac{3}{2} \sigma_e^{(0)n-1} (s_{ij}^{(2)} + (n-1) \sigma_e^{(02)} s_{ij}^{(0)}) \quad (18)$$

$$\xi_{ij}^{(1)} = \frac{2}{3} \sigma_e^{(0)n-1} (n-1) (\sigma_e^{(01)} s_{ij}^{(1)} + \frac{1}{2} (\sigma_e^{(11)} + (n-3) (\sigma_e^{(11)})^2 + (n-3) (\sigma_e^{(01)})^2) s_{ij}^{(0)}) \quad (19)$$

如果 $u < 2t - s$ ，方程 (15) 的最后一项相对 $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ 是较高阶的项，可以被忽略，应变和位移场三项渐进多项式变为：

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{\alpha\varepsilon_0} = r^{sn}\varepsilon_{ij}^{(0)} + r^{s(n-1)+t}\varepsilon_{ij}^{(1)} + r^{s(n-2)+2t}(\varepsilon_{ij}^{(2)} + \xi_{ij}^{(1)}) \quad (20)$$

$$\frac{u_{ij}}{\alpha\varepsilon_0} = r^{sn+1}u_i^{(0)} + r^{s(n-1)+t+1}u_i^{(1)} + r^{s(n-2)+2t+1}u_i^{(2)} \quad (21)$$

将方程 (11) 和 (20) (21) 三项中的每一项代入平衡方程 (3)、应变和位移关系式 (8)，上角标为 (0) (1) (2) 各位移和应力角函数分别满足边界条件和平衡方程，将相同角函数项分离，得到下列三项渐进边界值问题的方程：（上角标为 (0) 项（简称问题 (0)），依次类推）：

$$\begin{aligned} \text{问题 (0) :} \quad & (s+1)\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)} + \sigma_{r\theta,\theta}^{(0)} = 0 & (a) \\ & \sigma_{\theta,\theta}^{(0)} + (s+2)\sigma_{r\theta}^{(0)} = 0 & (b) \\ & (sn+1)u_r^{(0)} - \varepsilon_r^{(0)} = 0 & (c) \\ & u_r^{(0)} + u_{\theta,\theta}^{(0)} - \varepsilon_\theta^{(0)} = 0 & (d) \\ & u_{r,\theta}^{(0)} + snu_\theta^{(0)} - 2\varepsilon_{r\theta}^{(0)} = 0 & (e) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{问题 (1) :} \quad & (t+1)\sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)} + \sigma_{r\theta,\theta}^{(1)} = 0 & (a) \\ & \sigma_{\theta,\theta}^{(1)} + (t+2)\sigma_{r\theta}^{(1)} = 0 & (b) \\ & (s(n-1)+t+1)u_r^{(1)} - \varepsilon_r^{(1)} = 0 & (c) \\ & u_r^{(1)} + u_{\theta,\theta}^{(1)} - \varepsilon_\theta^{(1)} = 0 & (d) \\ & u_{r,\theta}^{(1)} + (s(n-1)+t)u_\theta^{(1)} + 2\varepsilon_{r\theta}^{(1)} = 0 & (e) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \text{问题 (2) :} \quad & (2t-s+1)\sigma_r^{(2)} - \sigma_\theta^{(2)} + \sigma_{r\theta,\theta}^{(2)} = 0 & (a) \\ & \sigma_{\theta,\theta}^{(2)} + (2t-s+2)\sigma_{r\theta}^{(2)} = 0 & (b) \\ & (s(n-2)+2t+1)u_r^{(2)} - (\varepsilon_r^{(2)} + \xi_r^{(1)}) = 0 & (c) \\ & u_r^{(2)} + u_{\theta,\theta}^{(2)} - (\varepsilon_\theta^{(1)} + \xi_\theta^{(1)}) = 0 & (d) \\ & u_{r,\theta}^{(2)} + (s(n-2)+2t)u_\theta^{(2)} + 2(\varepsilon_{r\theta}^{(1)} + \xi_{r\theta}^{(1)}) = 0 & (e) \end{aligned} \quad (24)$$

在平面应变条件下，不考虑弹性应变，应力偏张量和 Mises 等效应力等于：

$$s_r = -s_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \quad (25)$$

$$\sigma_e = \left(\frac{3}{4}(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 3\sigma_{r\theta}^2\right)^{1/2} \quad (26)$$

在上述方程 (22) ~ (24) 中，每一问题中包含有 5 个未知的角函数方程，在每一个方程组中 (c) 式是一个代数方程，可消去一个未知的角函数。方程 (22) 具有理论特征值 $s = -1/(n+1)$ 的非线性奇次系统。方程 (23) 具有理论特征值 t 的线性非奇次系统。方程 (24) 是线性非奇次系统，其方程的解依赖于方程 (22) (23) 的解，问题 (2) 可被确切表示为与问题 (1) 中方程 (15) 忽略 $\xi_{ij}^{(1)}$ 的方法相一致的形式，但在文献 [8] 中指出，在忽略 $\xi_{ij}^{(1)}$ 的条件下，问题 (2) 的特征值 u 明显比 $(2t - s)$ 大得多，而对于所有的应变硬化指数 $n (n \geq 3)$ ，在实际应用中特征值 $u < 2t - s$ ，因此在方程 (15) 中应保留 $\xi_{ij}^{(1)}$ 项。

从问题 (0)、问题 (1)、问题 (2) 可看出，每一边界值问题中包含 4 个常微分方程，一个代数方程，从代数方程中可消去一未知函数项。问题 (0) 的表达式 (22) 是含有非线性代数方程的非线性方程组，因此对表达式 (22) 中 (c) 式代数方程微分后与式 (22) 中 (e) 式联立，消去 $u_r^{(0)}$ ，问题 (0) 即可变为 4 个常微分方程；问题 (1) 的表达式 (23)，问题 (2) 的表达式 (24) 是含有线性代数方程的线性微分方程组，这种情况下，为了得到一个 $\sigma_r^{(k)}$ 的显式方程，应用 (c) 式代数方程消去 $\sigma_r^{(k)}$ 使方程简化。问题 (1)、问题 (2) 可表示为含有若干未知角函数的常微分方程组形式。

应用四阶 Runge-Kutta 解上述常微分方程组，首先将问题化为初值问题，未知初值和特征值的确定采用打靶法和 Newton-Raphson 迭代法，问题 (0) (1) (2) 的边值问题的边界条件为：

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{(i)}(0) = 0 \quad u_\theta^{(i)}(0) = 0 \\ \sigma_\theta^{(i)}(\pi) = 0 \quad \sigma_{r\theta}^{(i)}(\pi) = 0 \quad (i = 0,1,2) \end{aligned} \quad (27)$$

解问题 (0)、问题 (1)、问题 (2) 的常微分方程组，求出特征值 S 和 t ，以及角函数 $\sigma_r^{(i)}$ 、 $\sigma_\theta^{(i)}$ 、 $\sigma_{r\theta}^{(i)}$ 、 $u_r^{(i)}$ 、 $u_\theta^{(i)}$ ($i = 0,1,2$) (张量记法为 $\tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}$ 、 $\tilde{u}_i^{(k)}$ ，其中 $k = 0,1,2$)，将求出的角函数代入到式 (10) (21) 中，构成了应力场、位移场三项渐进多项式解的基本形式，下面进一步确定弹塑性裂尖应力场、位移场。

3 弹塑性裂尖应力场的确定

HRR 场的应力表达式为^[6]：

$$\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} = \left(\frac{EJ}{\alpha\sigma_0^2 I_n}\right)^{\frac{1}{n+1}} r^{-\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(n, \theta) \quad (28)$$

根据 2.2 节求出的特征值 s, t, u ，考虑材料硬化、屈服强度等机械性能的影响，三项渐进多项式弹塑性应力场的表达式可写为：

$$\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} = A_0 \bar{r}^s \sigma_{ij}^{(0)}(n, \theta) + A_1 \bar{r}^t \sigma_{ij}^{(1)}(n, \theta) + A_2 \bar{r}^{2t-s} \sigma_{ij}^{(2)}(n, \theta) \quad (29)$$

其中：

$$A_0 = \left(\frac{\alpha I_n \sigma_0}{E} \right)^{-\frac{1}{n+1}} = \left(\frac{E}{\alpha I_n \sigma_0} \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\bar{r} = \left(\frac{r}{J/\sigma_0} \right) \quad A_1 = \left(\frac{1}{\alpha} \right) (A_0)^{2-n} \quad A_2 = \frac{A_1^2}{A_0}$$

其中，式(29)的第一项系数 A_0 与 HRR 场应力系数相同， A_0 、 A_1 和 A_2 的关系可由特征值

参数的关系确定， t 为与硬化指数 n 有关的特征值参数， I_n 为与 n 有关的常数， \bar{r} 定义为无量纲距离， $\sigma_{ij}^{(0)}(n, \theta)$ 、 $\sigma_{ij}^{(1)}(n, \theta)$ 、 $\sigma_{ij}^{(2)}(n, \theta)$ 分别由问题(0)、问题(1)、问题

(2) 的常微分方程组形式的初值问题解法求得，平面应变和平面应力下的 I_n 值见图 2 所示：

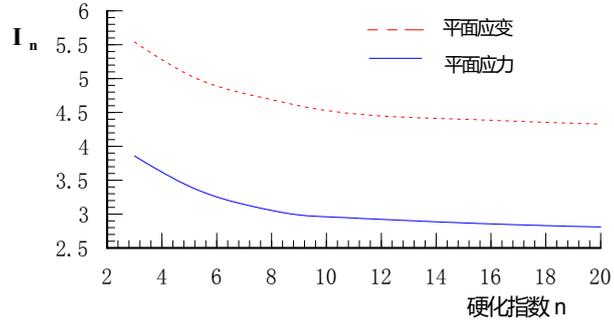


图 2 I_n 曲线图

从(28)和(29)两式可以看出，三项渐进多项式的第一项与 HRR 场的表达式一致，(29)式比 HRR 应力场(28)式多了两项，说明三项渐进多项式更逼近精确解，如果设 $A_1 = Q$ ，则式(29)由 J 与 Q 共同决定，这与文献[7]中的 J-Q 理论形式上是一致的，(29)式是距裂尖最近的过程区内弹塑性应力场表达式。由于有限元方法的复杂性，为了节省计算时间，式(29)是代替有限元解法的理想的解析法。

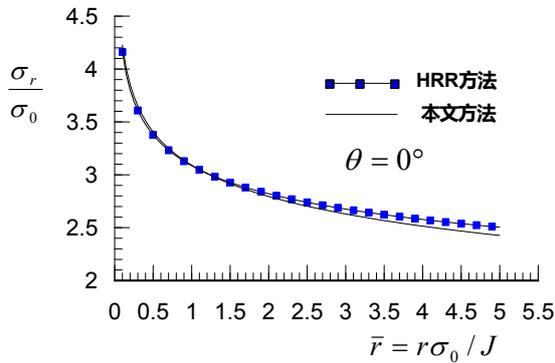
4 管线钢 16Mn 裂尖应力场分析

对于管线用钢 16Mn，设有一单位厚度的无限大平板，16Mn 材料满足弹塑性应力应变关系： $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n$ ，其中：屈服应变 $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$ ，屈服应力 $\sigma_0 = 352 \text{ MPa}$ ，硬化指数 $n = 6.7$ ，硬化系数 $\alpha = 2.039$ ，弹性模量 $E = 2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ， $\nu = 0.25$ ，平板中间有一裂纹长度为 30mm， $K_{IC} = 98.75 \text{ MPa}\sqrt{m}$ ，受外加应力 $\sigma = 85 \text{ MPa}$ 的单向拉伸载荷作用， $J = 1.596 \text{ kN/m}$ ，考虑平面应变情况，计算出角函数 $\sigma_{ij}^{(0)}(n, \theta)$ 、 $\sigma_{ij}^{(1)}(n, \theta)$ 、 $\sigma_{ij}^{(2)}(n, \theta)$ 、 $u_{ij}^{(0)}(n, \theta)$ 、 $u_{ij}^{(1)}(n, \theta)$ 、 $u_{ij}^{(2)}(n, \theta)$ 见表 1 所示，本文的三项渐进多项式弹塑性应力场、位移场的计算结果与 HRR 方法计算结果见图 3、4、5 和 6 所示，角度 θ 分别取 0 度、45 度、

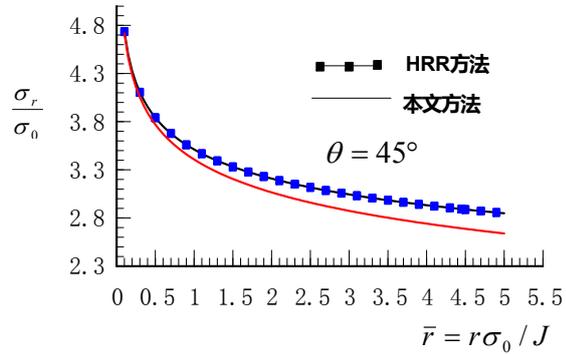
90度、120度、180度.

表 1 三项渐进多项式弹塑性应力场位移场角函数值

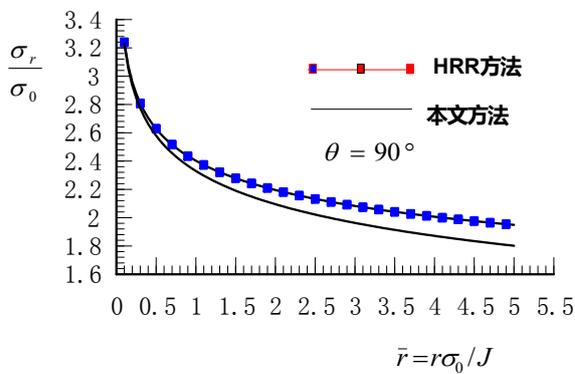
n=6.7	0°	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	180°
$\sigma_r^{(0)}(n, \theta)$	1.701	1.845	1.964	1.751	1.459	1.164	0.926	0.829	0.831	0.751
$\sigma_r^{(1)}(n, \theta)$	0.658	0.591	0.410	0.348	0.307	0.252	0.171	0.175	0.449	1.154
$\sigma_r^{(2)}(n, \theta)$	-3.83	-3.604	-4.266	-4.307	-3.592	-2.452	-1.074	-0.436	-2.785	-12.18
$\sigma_\theta^{(0)}(n, \theta)$	2.347	2.253	2.014	1.701	1.348	0.976	0.614	0.297	0.077	0.0
$\sigma_\theta^{(1)}(n, \theta)$	0.320	0.366	0.474	0.576	0.628	0.606	0.500	0.318	0.109	0.0
$\sigma_\theta^{(2)}(n, \theta)$	-4.81	-4.813	-4.778	-4.878	-5.112	-5.183	-4.686	-3.308	-1.279	0.0
$u_r^{(0)}(n, \theta)$	-0.13	-0.122	-0.057	0.152	0.566	1.078	1.422	1.383	0.985	0.373
$u_r^{(1)}(n, \theta)$	1.189	0.157	0.017	-0.358	-0.734	-0.561	0.274	1.153	1.576	1.524
$u_r^{(2)}(n, \theta)$	0.168	0.141	0.161	0.805	2.595	3.810	1.853	-2.044	-4.915	-5.862
$u_\theta^{(0)}(n, \theta)$	0.0	0.052	0.090	-0.057	-0.382	-0.885	-1.452	-1.929	-2.096	-2.202
$u_\theta^{(1)}(n, \theta)$	0.0	-0.082	-0.130	-0.060	0.203	0.533	0.616	0.273	-0.379	-1.114
$u_\theta^{(2)}(n, \theta)$	0.0	-0.084	-0.155	-0.365	-1.234	-3.038	-4.701	-4.656	-2.723	0.236



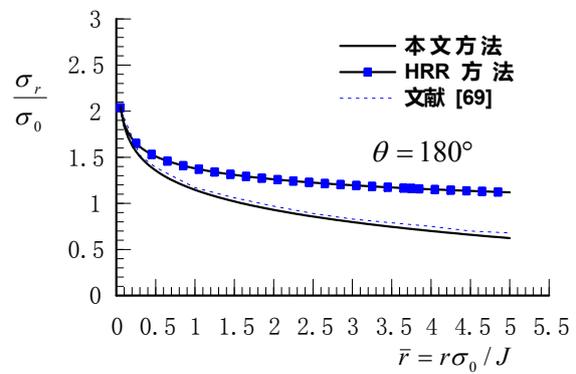
(a)



(b)



(c)



(d)

图3 16Mn 材料三项渐进弹塑性多项式计算结果（径向应力 σ_r ）

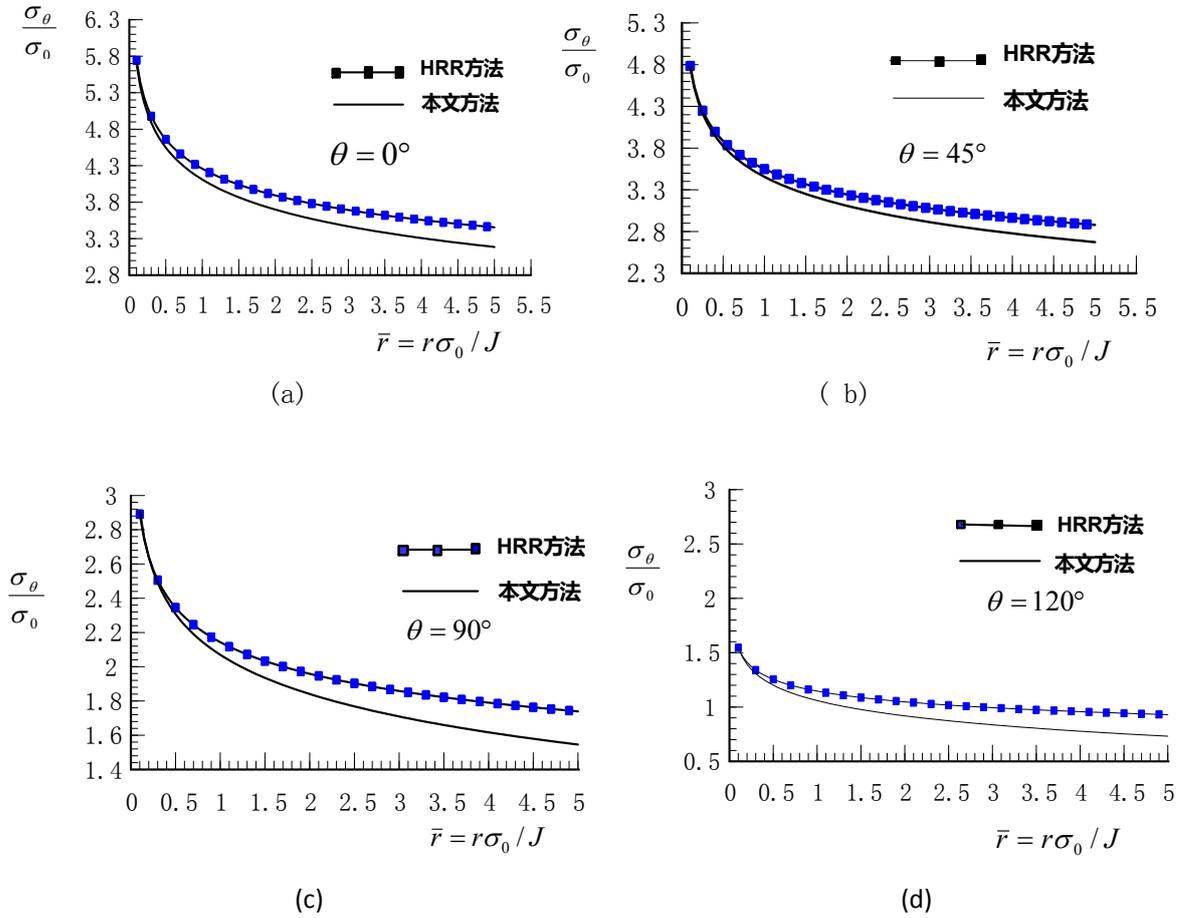
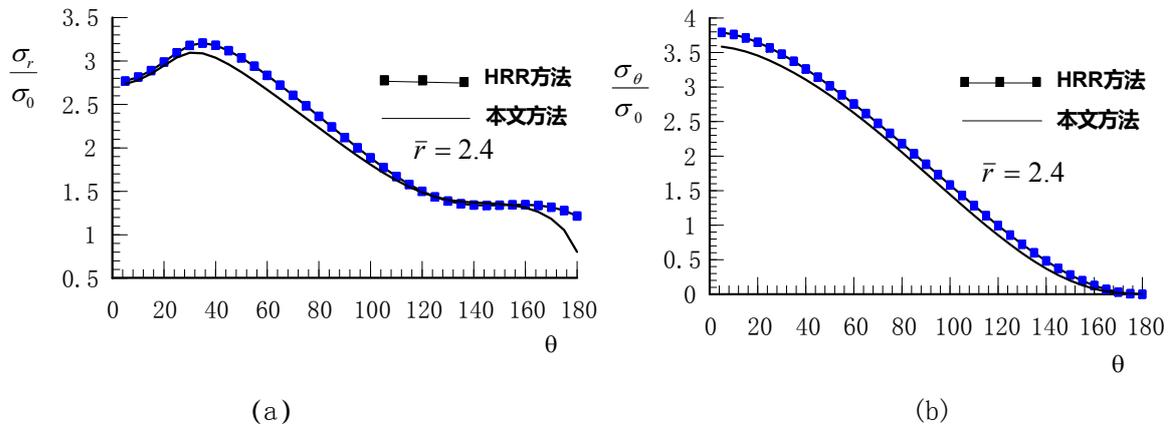


图4 16Mn 材料三项渐进弹塑性多项式计算结果（切向应力 σ_θ ）



$$\frac{\sigma_{r\theta}}{\sigma_0}$$

$$\bar{r} = 2.4$$

(c)

图5 16Mn 材料三项渐进弹塑性应力与角度的关系曲线 ($\bar{r} = 2.4$)

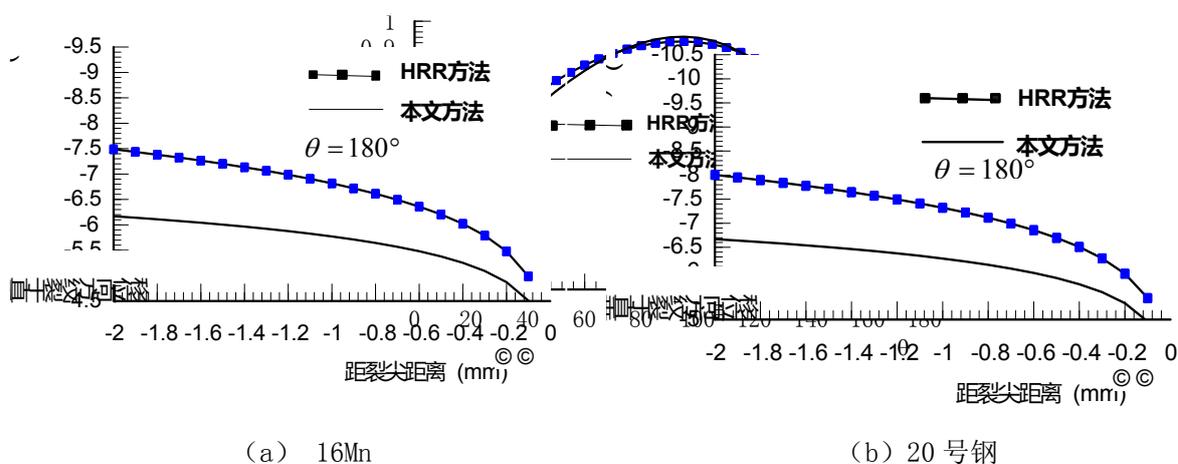


图6 16Mn 和 20 号钢材料位移场分布 (20 号钢工况与 16Mn 相同)

图3为16Mn材料三项渐进弹塑性多项式径向应力 σ_r 计算结果,其中图(a)~(d)计算角度分别取0度、45度、90度和180度,从图3(a)~(d)中得出,三项渐进多项式径向应力值比HRR方法计算得到的应力值略小,并且随着距裂尖距离增加而减小,本文计算结果与文献[8]计算结果相吻合。

图4为16Mn材料三项渐进弹塑性多项式切向应力 σ_θ 计算结果,图(a)~(d)的计算角度分别取0度、45度、90度和120度,从图4(a)~(d)中得出,三项渐进多项式切向应力值也略小于HRR方法计算的应力值,并且变化趋势是随着距裂尖距离增加而减小,这与文献[68]中的计算结果是一致的;

图5为16Mn材料三项渐进弹塑性应力场与角度的关系曲线($\bar{r} = 2.4$),图(a)~(c)分别为径向应力、切向应力和剪切应力的计算结果,从图5(a)~(c)中得出,当 $\bar{r} = 2.4$ 时,HRR与三项渐进多项式应力场基本吻合,但HRR应力场略大;

图6为16Mn和20号钢材料位移场分布(20号钢工况与16Mn相同),图(a)(b)分别为16Mn和20号钢材料,从图6(a)(b)可得出,沿裂尖反方向,采用HRR计算的位移大于三项渐进多项式计算得到的位移,这是由于HRR计算得到的切向应力 σ_θ 大于三项

渐进多项式的切向应力 σ_θ 。

从以上结果分析表明，三项渐进多项式应力场、位移场方程可较好的计算裂尖应力、应变和位移情况，同已有文献相比，计算结果正确，与断裂力学有限元方法相比较，计算时间缩短，方法简单可行，便于工程应用。

5. 结论

本文通过对裂尖过程区应力应变场研究，得出了如下结论：

(1) 从二维平面应变弹塑性体 I 型裂纹三轴向应力、应变出发，考虑了材料的硬化系数、硬化指数以及小变形 J 积分的假设，研究了裂尖应力、位移场的三项渐进多项式分布规律，并对管线钢应力场、位移场角函数进行了计算，得出了较为精确的理论解，对 HRR 方法进行了合理的修正。

(2) 三项渐进多项式应力、位移场的第一项与 HRR 场的表达式一致，其他项可写为二项之和形式，这与文献[7]中的 J-Q 理论形式上是一致的，考虑有限元方法在断裂力学的奇异性、复杂性，本方法是代替有限元解法的理想的解析法，可节省计算时间，提高计算精度和效率。

(3) 三项渐进多项式应力、位移场的计算结果较 HRR 应力、应变场的计算结果略小，与文献[8]中的计算结果是一致的，这表明了用三项渐进多项式研究裂尖应力场、位移场是正确的。

Reference:

- [1] J.W.Hutchinson, Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening materials. *J.Mech. Phys. Solids* 1968,16(1), P13-31
- [2] C.F.Shin, M.D.German, Requirements for a one parameter characterization of crack tip fields by the HRR singularity. *Int. J. Fracture* 1981, v(17): p27-43
- [3] Yu. P. Zhelthov and S. A. Khristianovich The mechanics of hydraulic fracture of oil-bearing sheets 1955, *Izv Akad. Nauk SSR, Otn* 3, P3-41 (in Russian)
- [4] G. I. Barenblatt The information of equilibrium cracks during brittle fracture General ideas and hypotheses Axially-symmetric cracks *PMM* 23, 1959, p434-444
- [5] L.xia , C.Wang,C.F.Shih Higher-order analysis of crack tip fields in elastic power-law hardening materials *J.Mech.. Phys. Solids* 1993, 41 (4): p665-687
- [6] S.yang, Y.J. Chao, M.A.Sutton, Higher order asymptotic terms in a power-law hardening materials *Eng.Frac.Mechanics* 1993, 45(1): P1-20
- [7] Kanninen .M.F, Popelar.C.H. *Advanced Fracture Mechanics* Beihang University press 1987 ,P179~185 Beijing (Chinese)
- [8] O'Dowd and C.F.Shih, Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter-I .Structure of fields, *J.Mech.Phys.Solids*, 1991, 39 (6): P989-1015